NEW/OLD

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

නව/පැරණි නිර්දේශය

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

මෙය උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා සකස් කෙරිණි.
ප්‍රධාන/ සහකාර පරීක්ෂක රැස්වීමේ දී ඉදිරිපත්වන අදහස් අනුව මෙහි වෙනස්කම් කරනු ලැබේ.

අවසන් සංශෝධන ඇතුළත් කළ යුතුව ඇත.

අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2020

10 - සංයුක්ත ගණිතය I

(නව/පැරණි නිර්දේශ)

ලකුණු බෙදීයාම

I පත්‍රය

A කොටස : $10 \times 25 = 250$

B කොටස : $05 \times 150 = 750$

එකතුව = 1000 / 10

I පත්‍රය අවසාන ලකුණ = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
.... √ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
.... √ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
.... √ $\frac{3}{5}$

03 (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\boxed{\frac{10}{15}}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

මෙවර සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න. 51 චිත්‍ර විෂයයේ I, II හා III පත්‍රවලට අදාළ ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවල ඇතුළත් කර අකුරෙන් ද ලිවිය යුතු වේ.

***

නව නිර්දේශය

(**b**) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$

5

$$\therefore \quad \frac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$

5

$\frac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore$ $x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

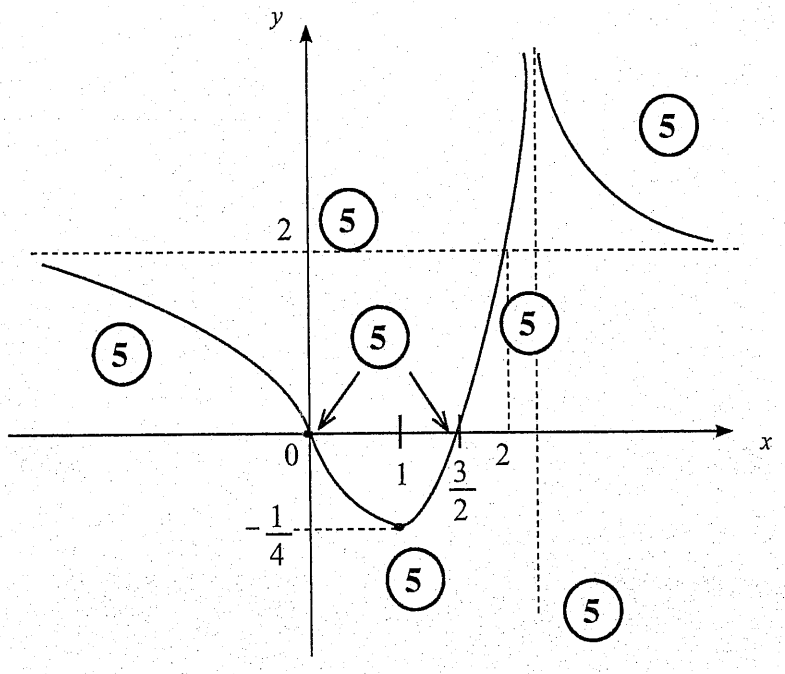
$\boxed{35}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ ස්ථානීය අවමයකි.

5 **05**

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore\ y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ 5



45

$$\frac{1}{1+f(x)} \le \frac{1}{3}.$$

$1 + f(x) > 0$ වේ.

$\therefore 3 \le 1 + f(x).$

$\therefore f(x) \ge 2.$ 5

$f(x) = 2 \iff x(2x-3) = 2(x-3)^2.$ 5

$\iff \quad 2x^2 - 3x = 2(x^2 - 6x + 9)$

$\iff \quad x = 2$ 5

x හි අවශ්‍ය අගයන් $2 \le x < 3$ හෝ $x > 3$. 5 **20**

---

14. (a) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

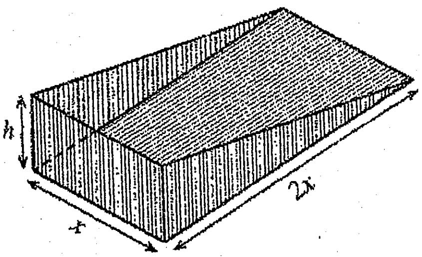
ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා $x-$අන්තඃඛණ්ඩ දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $\dfrac{1}{1+f(x)} \leq \dfrac{1}{3}$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(b) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත.
එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(a) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x\,(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$= \dfrac{(x-3)\,(4x-3) - 2x\,(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2 - 15x + 9 - 4x^2 + 6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}.$ 5

25

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ 5

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.

5 5 5

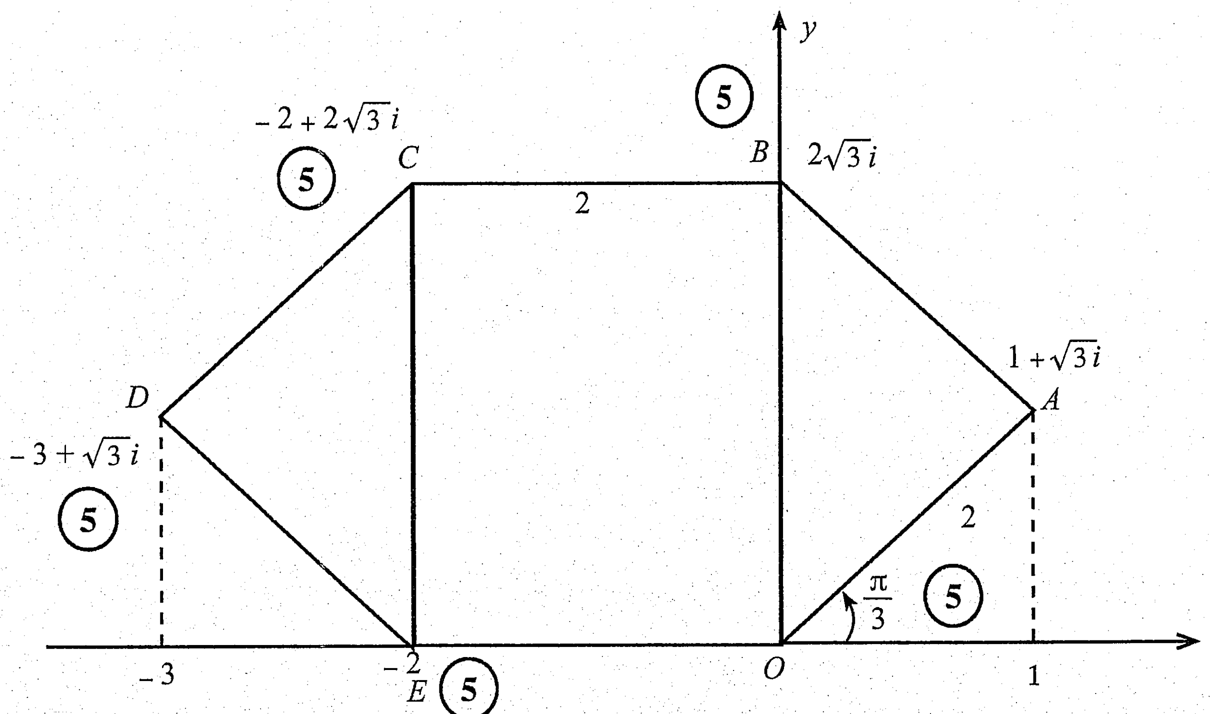
20

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

(c) $1+\sqrt{3}\,i = 2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right\}.$ 5

10



25

$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)}$ 5

$= (z-w)\;(\bar{z}-\bar{w})$ 5

$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$

$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2$ 5

$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow (1)$

$\boxed{15}$

$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow (2)$ 5

(1) − (2) මගින්;

$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2$

$= -\,(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2\,|w|^2)$ 5

$= -\,(1-|z|^2)\,(1-|w|^2)$ 5 $\longrightarrow (3)$

$\boxed{20}$

$|w| = 1$, බැවින් (3) න් $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\; |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l} \because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1 \end{array}\right]$

$\therefore\; \left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ 5

$\boxed{10}$

$a = 1$, වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \quad C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

$\boxed{10}$

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \; P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

$\boxed{20}$

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy)$ 5

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = z\overline{z}$. 5

$\boxed{10}$

---

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $1 + \sqrt{3}\,i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.

ආගන්ඩ් සටහනක, O ලක්ෂ්‍යයෙන් මූලය ද A ලක්ෂ්‍යයෙන් $1 + \sqrt{3}\,i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ද නිරූපණය කරයි. $OABCDE$ යනු O හා A අනුයාත ශීර්ෂ ලෙස ඇතිව ශීර්ෂවල අනුපිළිවෙළ වාමාවර්ත අතට ගෙන ඇති සවිධි ෂඩස්‍රය යැයි ගනිමු. B, C, D හා E ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ 5

$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$ 5

$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$ 5

$\boxed{20}$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

$\boxed{10}$

---

7. $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$ සඳහා $x = 2t - \cos 2t$ හා $y = 1 - \sin 2t$ මගින් පරාමිතිකව C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}$ යන්න t ඇසුරෙන් සොයන්න.
C වක්‍රයට එය මත $t = \frac{\pi}{12}$ ට අනුරූප ලක්ෂයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය
$6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2t - \cos 2t, \quad y = 1 - \sin 2t$

$\frac{dx}{dt} = 2 + 2\sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\cos 2t.$ 5

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos 2t}{2 + 2\sin 2t} = -\frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}$ 5

$t = \frac{\pi}{12}$ මගින් $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ හා $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ලැබේ. 5

අවශ්‍ය අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$ 5

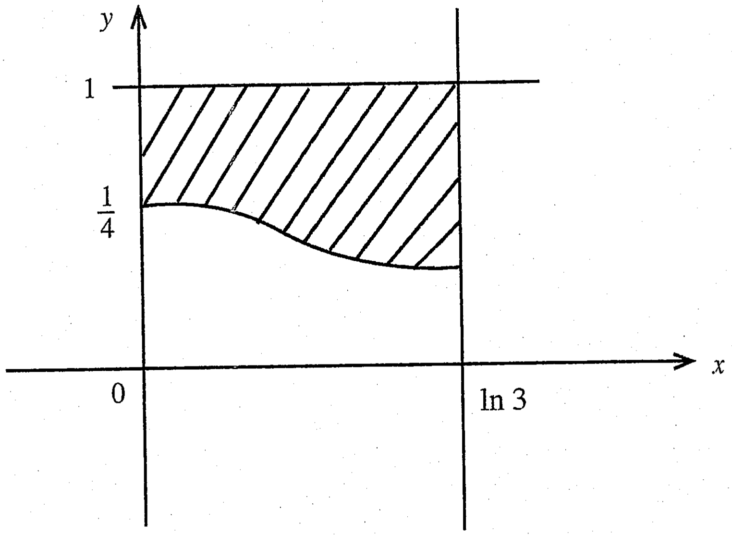
අවශ්‍ය සමීකරණය :

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

එනම්, $6\sqrt{3}\,x - 6y - \sqrt{3}\,\pi + 12 = 0.$ 5

$\boxed{25}$

6. $y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 1$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.



5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \displaystyle\int_0^{\ln 3} \left\{1 - \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\right\} dx$

$u = 1 + e^x.$

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\, du$ 5

$= \ln 3 - \displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln|u| + \dfrac{1}{u}\right\}\Bigg|_2^4$ 5

$= \ln 3 - \left\{\ln 4 - \ln 2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right\}$

$= \ln 3 - \left\{\ln 2 - \dfrac{1}{4}\right\}$

$= \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{1}{4}.$ 5

25

පැරණි නිර්දේශය

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan\frac{\pi}{4} \quad 5$$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 \quad 5$$

$$\therefore \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \, \sin x \quad 5$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1 - \sin^2 x) \sin x$$

$$\sin x\,(1 - \sin x)\,(2 + \sin x) = 0 \quad 5$$

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}$ 5 හෝ $x = m\pi\,;\, m \in \mathbb{Z}$. 5

35

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\ \sin 20^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. 5

$\therefore\ \alpha = 30^\circ$. 5 $(20^\circ < \alpha < 90^\circ)$

10

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore\ \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ 5

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\ \tan\beta}$. 5

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. 5

$\cos^2 x\ (1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ 5

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow$ $\sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow$ $\sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ 5 හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ 5

35

(b) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, 5 + 5

මෙහි $BC = a, CA = b$ හා $AB = c$. **10**

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{AB}{\sin \alpha} = \dfrac{AD}{\sin 80°}$. 10

ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{DC}{\sin(\alpha - 20°)} = \dfrac{AD}{\sin 20°}$. 10

$$\therefore \quad \frac{\sin(\alpha - 20°)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 20°}{\sin 80°}.$$

$\therefore \quad \sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin \alpha$. 5

25

$\sin 80° = \sin(90° - 10°) = \cos 10°$ 5 5

දැන්, $\sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin \alpha$ මගින්,

$\cos 10° \sin(\alpha - 20°) = 2 \sin 10° \cos 10° \sin \alpha$ දෙනු ලැබේ. 5 5

$\therefore \sin\alpha \cos 20° - \cos\alpha \sin 20° = 2 \sin 10° \sin \alpha$. 5

$\therefore \tan \alpha (\cos 20° - 2 \sin 10°) = \sin 20°$ 5 හා ඒ නයින්, $\tan \alpha = \dfrac{\sin 20°}{\cos 20° - 2 \sin 10°}$. 5

35

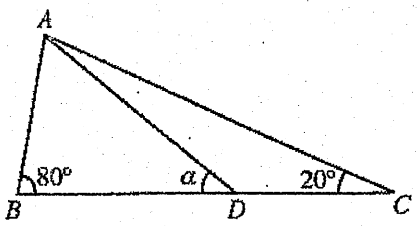
17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C=80^\circ$ හා $A\hat{C}B=20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB=DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B=\alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha-20^\circ)=\sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ=\cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha=\dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ-2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (*a*)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha=30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x)+\tan^{-1}(\sin x)=\dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B.$ 10

10

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \sin 90^\circ\cos\theta - \cos 90^\circ \sin\theta$ 5

$= \cos\theta.$ 5 ($\because \sin 90^\circ = 1$ හා $\cos 90^\circ = 0.$)

10

(ii) $2\sin 10^\circ = 2\sin(30^\circ-20^\circ)$ 5

$= 2\sin 30^\circ\cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ \sin 20^\circ$ 5

$= \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ.$ 5 ($\because \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ හා $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

15

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27. \quad 5$$

5 5

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}. \quad 5$$

$$\therefore \; 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2. \quad 5$$

$\therefore$ C_1 හා C_2 ප්‍රලම්බ ඡේදනය නොවේ. 5

30

$l_1 : y-2 = 3(x-1)$ හා $l_2 : y-2 = -\frac{1}{3}(x-1).$

$l_1 : 3x - y - 1 = 0$ හා $l_2 : x + 3y - 7 = 0.$

5　　5

40

$l : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). 5

එවිට, $x = 1+2t,\ y = 2+t,$ මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

10

C_1 සඳහා

$P \equiv (1+2t, 2+t)$ සිට l_1 ට ලම්බ දුර C_1 හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\dfrac{|3(1+2t)-(2+t)-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}.$ 10　5

එනම්, $|3+6t-2-t-1| = 5.$ 5

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ 5

$P \equiv (3, 3) = B$, බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ සුදුසු නොවේ.

5　5

$C_1 : (x-3)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{5}{2}.$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \dfrac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \dfrac{31}{2} = 0$ 5

45

C_2 හි සමීකරණය

$(x-1)(x-3) + (y-2)(y-3) = 0.$ 15

කේන්ද්‍රය 5, අරය 5, සමීකරණය 5

15

---

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛාව

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1+2t, 2+t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

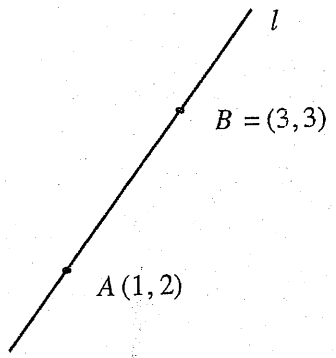
l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මුළුමනින්ම පළමුවන

අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-6x-6y+\frac{31}{2}=0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(16)



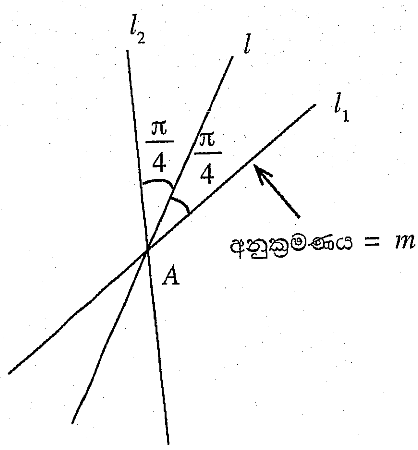
අනුක්‍රමණය $= \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$. 5

l හි සමීකරණය : $y - 2 = \frac{1}{2}(x-1)$. 5

මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ.

$\boxed{10}$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad 10$$



$$\therefore \quad 1 = \left|\frac{2m-1}{2+m}\right|$$

5

$\Leftrightarrow \quad 2+m = \pm(2m-1)$ 5

$\Leftrightarrow \quad 2+m = 2m-1$ හෝ $2+m = -2m+1$

$\Leftrightarrow \quad m = 3$ හෝ $m = -\frac{1}{3}$.

5 5

(c) $$I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \ \sin^3 x \ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \ \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \ \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} \ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^6 x \sin^3 x \quad 5$$

5

$$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \ \sin^3 x \ \mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \ \sin^3 x \ \mathrm{d}x}_{I} \ .$$

5

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \ \sin^3 x \ \mathrm{d}x \ . \quad 5$$

20

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \ \sin^3 x \ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \ \sin^2 x \ \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \ (1 - \cos^2 x) \sin x \ \mathrm{d}x \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \ \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \ \mathrm{d}x \right] \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left. \frac{-\cos^7 x}{7} \right|_0^{\pi} + \left. \frac{\cos^9 x}{9} \right|_0^{\pi} \right]$$

5 5

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right] \quad 5$$

$$= \frac{2\pi}{63} \ .$$

25

(b) $$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x(1-\cos 2\pi x)\ dx$$ 5

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x\ dx}_{I}$$ 5

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I. \qquad \text{———— } (1)$$ 5

දැන්, $$I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \quad dx$$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{5} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x\ \ dx$$ 5

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \ \ dx}_{I}\right]$$ 5 5

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e-1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I.$$ 5 5

$$\therefore I\left(1+\frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2+1}.$$ 5

$\therefore$ (1) න්, $$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \ dx = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$$ 5 + 5

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1+4\pi^2}.$$

60

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,\mathrm{d}x$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

$x^3: \; 1 = A.$ 5

$x^0: \; -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

5 5

විකල්ප ක්‍රමයක්:

ආදේශයෙන්

$x = -1: \; -30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0: \; -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

$\boxed{15}$

$$\therefore \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9} \cdot \quad 10$$

$$\int \frac{x^2+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \cdot \quad 5$$

5 5 5

$\boxed{30}$

(*b*) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$= 2x^2 + 3x \cdot \dfrac{4500}{x^2}$; $x > 0$ සඳහා

5

$\therefore \dfrac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500 \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$

5

$\dfrac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\dfrac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\dfrac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

$\boxed{35}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ. 5

05

$x \neq 3$; සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ 5

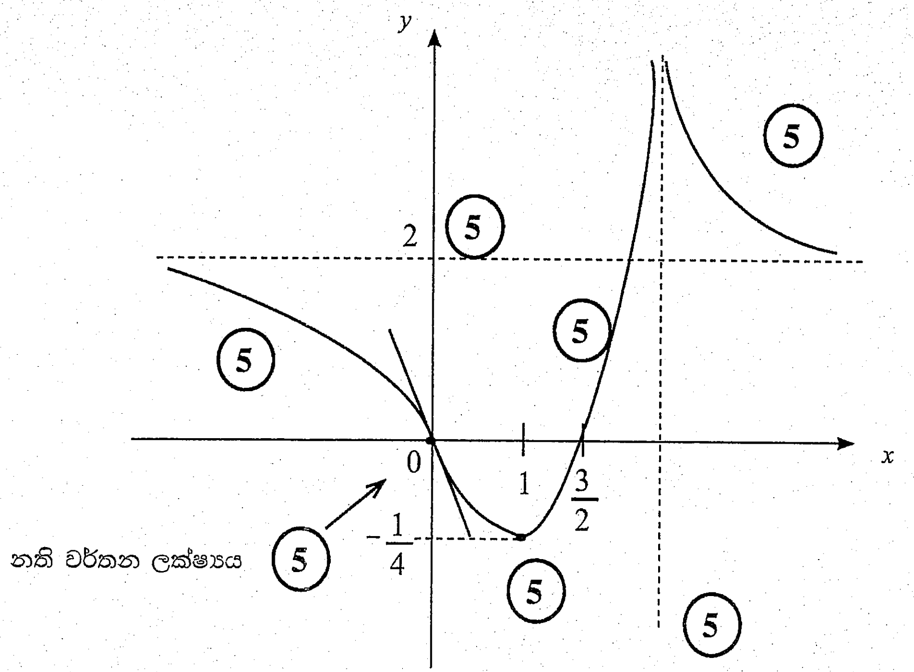
	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
අවතලභාවය	පහලට අවතල වේ. 5	ඉහලට අවතල වේ. 5

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය = $(0, 0)$. 5

20

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore \; y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ 5



45

---

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

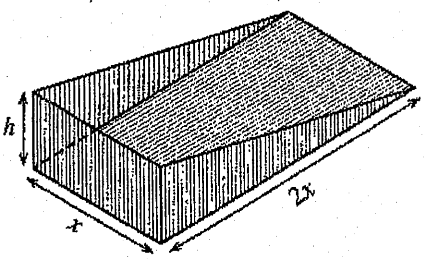
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(*a*) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$= \dfrac{(x-3)(4x-3)-2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2-15x+9-4x^2+6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. 5

$\boxed{25}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ 5

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$ is	$\searrow$ අඩුවේ.	$\nearrow$ වැඩිවේ.	$\searrow$ අඩුවේ.
	5	5	5

$\therefore$ $f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

$\boxed{20}$

(c) $1+\sqrt{3}\,i \;=2\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

$=2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 5

10

$(1+\sqrt{3}\,i)^m\,(1-\sqrt{3}\,i)^n=2^m\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ 5

$=2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3}+i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ 5

$=2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ 5

$\therefore\; 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3}+i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)=2^8$

$\Rightarrow m+n=8$ හා $(m-n)\,\frac{\pi}{3}=2k\pi\;;\;k\in\mathbb{Z}.$

5 5

25

$$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)} \quad 5$$

$$= (z-w)\,(\overline{z}-\overline{w}) \quad 5$$

$$= z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w}$$

$$= |z|^2 - (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + |w|^2 \quad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

$\boxed{15}$

$$|1-\overline{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |z\overline{w}|^2 \longrightarrow 2 \quad 5$$

1 – 2 මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\overline{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\overline{w}|^2 \text{ ලැබේ.} \quad 5$$

$$= -(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2|w|^2) \quad 5$$

$$= -(1-|z|^2)(1-|w|^2) \quad 5 \longrightarrow 3$$

$\boxed{20}$

$|w| = 1,$ බැවින් 3 න් $|z-w|^2 - |1-z\overline{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\overline{w}|.$

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\overline{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l} \because z \neq w \\ \Rightarrow z\overline{w} \neq 1 \end{array}\right]$

$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| = 1 \quad 5$$

$\boxed{10}$

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \; C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

10

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \; P = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

20

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ 5

$= x^2 - i^2y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = z\bar{z}$. 5

10

---

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(a) $$A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$ 5

$$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix}$$ 5

$$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 5

$$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C$$ 5

$\boxed{20}$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

$\boxed{10}$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n \to \infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad 5$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. 5

$\boxed{10}$

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r=1; & U_1 = V_1 - \cancel{V_2} \\ r=2; & U_2 = \cancel{V_2} - \cancel{V_3} \end{array}\right\} \quad 5$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\left.\begin{array}{ll} r=n-1; & U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - \cancel{V_n} \\ r=n; & U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1} \end{array}\right\} \quad 5$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad 5$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)}\right) \quad 5$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}. \quad 5$$

$$\boxed{25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right\} \quad 5$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})\ (1+\frac{2}{n})}\right\}$$

$$= 1. \quad 5$$

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. 5

$$\boxed{15}$$

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2\sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r. \quad 5$$

$$\boxed{10}$$

P	G	FS	MS	ආකාර ගණන
2	4	2	3	10 ${}^{5}C_2\ {}^{5}C_4\ {}^{3}C_2\ {}^{7}C_3 = 5250$ 5
2	5	2	2	10 ${}^{5}C_2\ {}^{5}C_5\ {}^{3}C_2\ {}^{7}C_2 = 630$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ 5

35

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)\ (r+2)} \text{ හා } V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)\ (r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. 5

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)\ (r+2)} = \frac{A}{(r+1)\ (r+2)} - \frac{B}{r\ (r+1)} \text{ හා}$$

ඒ නයින්, $3r - 2 = Ar - B(r+2) \quad r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

5

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$r^1: \quad 3 = A - B$ $\qquad A = 4$ 5

$r^0: \quad -2 = -2B$ $\qquad B = 1$ 5

20

---

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (*a*) P = පියානෝ වාදකයින් (5), G = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

FS – ගායිකාවන් (3)

MS – ගායකයන් (7)

P	G	S	ආකාර ගණන
2	4	5	$^5C_2\ ^5C_4\ ^{10}C_5 = 12600$ (10) (5)
2	5	4	$^5C_2\ ^5C_5\ ^{10}C_4 = 2100$ (10) (5)

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ (5)

35

(b) $(x^2 - 1)$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1) = 0$ හා $h(-1) = 0$ වේ. 5

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ —— ① හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— ② වේ.
5 5

① − ② මගින් $2 + 2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore \; b = -1.$ 5

20

$h(x) = p(x) \cdot (x^2 - 2x) + 5x + k$ 5

$h(0) = k.$ 5

$\therefore k = c.$

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 5

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 5

① + ②, මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ 5

25

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)(x^2 - 1)$ 5

$= (x+1)^2 (x-1).$ 5

10

$(\lambda = -1 \; , \mu = 1.)$

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2\ ]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

15

$\alpha + \beta = -p.$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}.$ 5

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ 5 $\quad (\because\ \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

<u>විකල්ප ක්‍රමයක්</u>

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha r = \dfrac{c}{2}$ 5

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

15

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)\ (x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. 10

තවද, $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p-2q) \quad = \dfrac{3}{2}\ (q-2p).$

5

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}.$

$\therefore \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2.$ 5

$x^2 - \dfrac{3}{2}\ (q-2p)\,x + \dfrac{1}{2}\ (q-2p)^2 = 0.$ 5

$2x^2 + 3(2p-q)\,x + (2p-q)^2 = 0.$

25

---

11. (a) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

(a) α යනු $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2 + p\alpha + c = 0$ —— (1) හා (5) $2\alpha^2 + q\alpha + c = 0$ වේ. (5)

$\therefore\ \alpha^2 + (q - p)\alpha = 0$ හා එබැවින් $\alpha[\alpha - (p - q)] = 0$ වේ.
(5)

ඒනයින්, $\alpha = p - q$. (5) $(\because\ c > 0 \Rightarrow \alpha \neq 0)$

$\boxed{20}$

---

(1) $\Rightarrow c = -\alpha(\alpha + p)$ (5)

$= -(p - q)(2p - q)$ (5) (α සඳහා ආදේශයෙන්

$= -(q - p)(q - 2p)$.

$\boxed{10}$

(i) $c > 0, \Rightarrow (q - p)(q - 2p) < 0$. (5)

$\therefore$ p හා $2p$ අතර q පිහිටයි.

$p > 0$ නම් $p < 2p$ වන බැවින් $p < q < 2p$ වේ. (5)

$\boxed{10}$

---

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.
$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.
ඒ නයින්, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ---------------- (1)

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, (1) න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. (5)

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta.$ (5)

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. (5)

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. (5)

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}.$

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}.$ (5)

$\boxed{25}$

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න. **ඒ නයින්,** A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S: (x+2)^2 + y^2 = r^2$ 5

මෙය $(-1, \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \; 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \; 4 = r^2.$

ඒ නයින් S හි සමීකරණය $(x+2)^2 + y^2 = 4.$ 5

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ ---------------- (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x+1) = 0$ වේ. 5

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

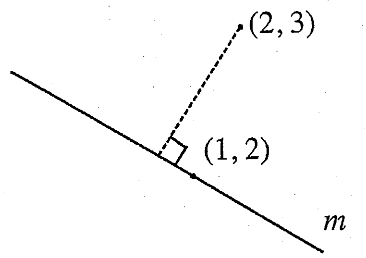
ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2$, (1) හි ආදේශ කරමු. 5

එවිට, $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. 5

25

8. $m \in \mathbb{R}$ හා l යනු $A \equiv (1,2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B \equiv (2,3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.



l හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x - 1)$ වේ. 5

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1+m^2}}$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1-m)^2$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad (2m-1)(m-2) = 0$$

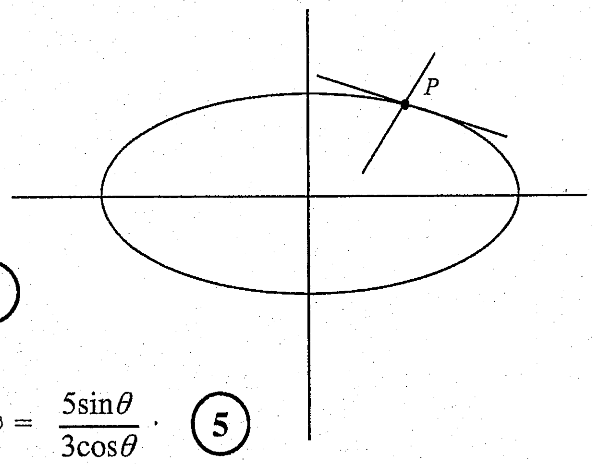
$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2} \text{ or } m = 2.$$ 5

25

7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ඉලිප්සයට එය මත $P\equiv(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x-3\cos\theta\, y=16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.

$x=5\cos\theta,\ y=3\sin\theta$



$\dfrac{dx}{d\theta}=-5\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=3\cos\theta.$ 5

$\sin\theta\neq0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ 5

$\cos\theta\neq0$ සඳහා P හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $=\dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$. 5

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta\neq0$ සඳහා $y-3\sin\theta=\dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x-5\cos\theta)$ වේ. 5

$$5\sin\theta x-3\cos\theta y=16\sin\theta\cos\theta.$$

$\cos\theta=0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. (P යන්න $y-$ අක්ෂය මත පිහිටන විට)

$y-$ අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y=-\dfrac{16}{3}\sin\theta.$

නමුත්, $3\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\ y=-\dfrac{8}{\sqrt{3}}.$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය $y-$ අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0,\ -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

25

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\dfrac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi \displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ 5

$= \pi \displaystyle\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\,du$; මෙහි $u = 1 + e^x$. 5

$= \pi \displaystyle\int_2^4 \left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

$= \pi \left\{\ln|u| + \frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \pi \left\{\ln 4 - \ln 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right\}$

$= \dfrac{\pi}{4}\{4\ln 2 - 1\}$ 5

25

5. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})} \times \frac{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})}{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(3x-\pi)} \cdot (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}) \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3(x-\frac{\pi}{3})} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot (\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}) \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

විකල්ප ක්‍රමය :

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})} \times \frac{(x-\frac{\pi}{3})}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$5 \quad 5$

$$= \left[\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

25

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1 + x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r, \text{ මෙහි } {}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad r = 1, 2, \ldots, n \text{ සඳහා}$$

5 5

හා ${}^nC_0 = 1.$

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; 5 මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots\ n-1\}$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(r+1)!\ (n-r-1)!} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-r} = \frac{1}{r+1}$$

$$\Leftrightarrow n - r = r + 1$$

$$\Leftrightarrow n = 2r + 1. \quad 5$$

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

25

වෙනත් ක්‍රමයක් :

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; 5 මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!} \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n-(r-1)} = \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow n - r + 1 = r$$

$$\Leftrightarrow n = 2r - 1. \quad 5$$

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

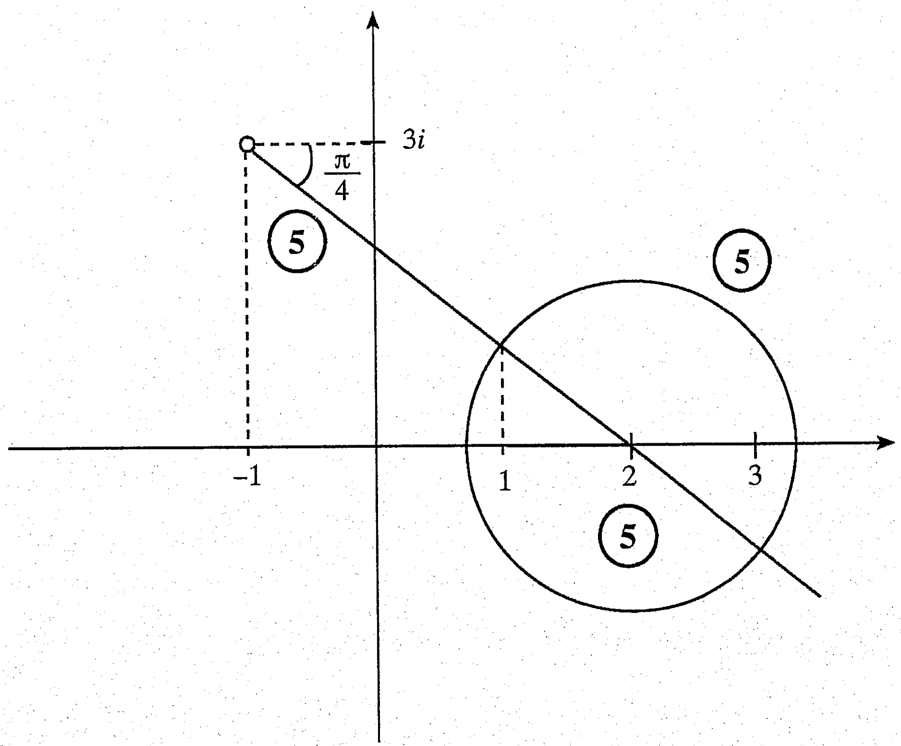
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\operatorname{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



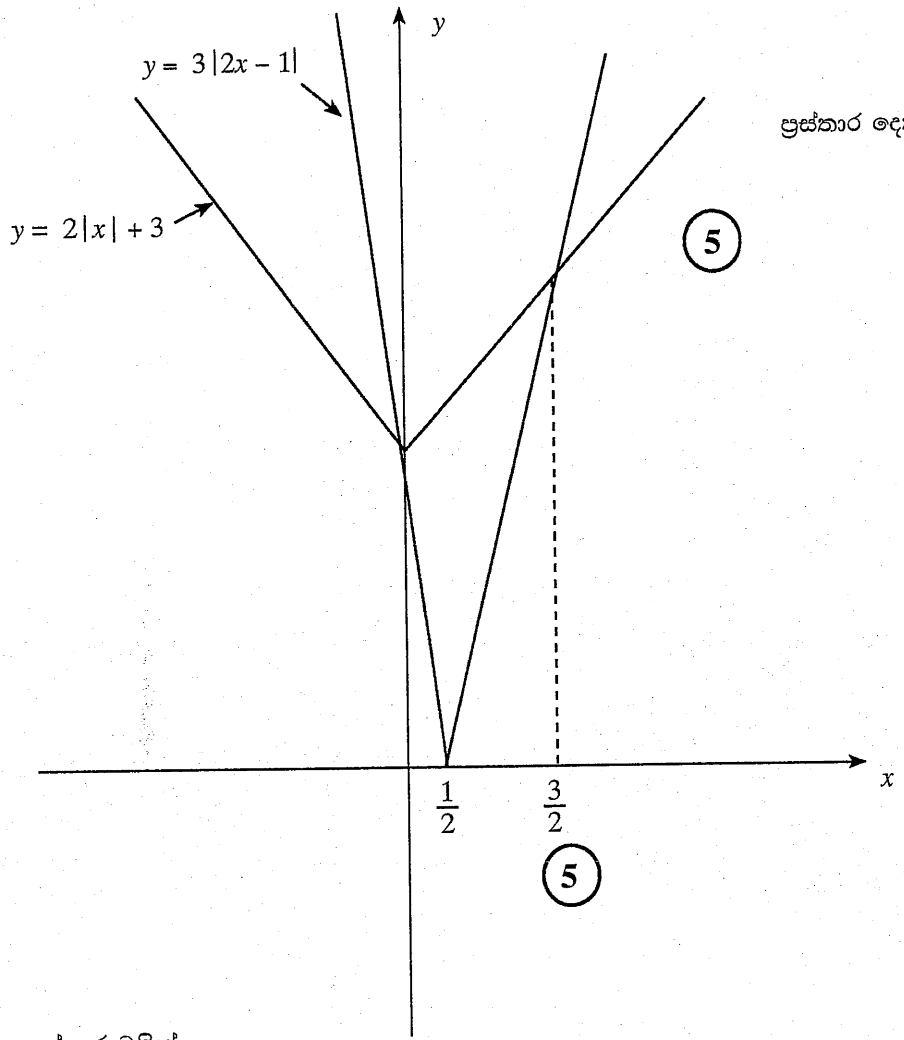
අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1+i$ 5 හා $3-i$ වේ. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය II :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5 .

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :



ප්‍රස්තාර දෙකම සඳහා 5

ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ or $x > \frac{3}{2}$. 5

විකල්ප ක්‍රමය I :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$3\,|2x-1| > 2\,|x|+3$$

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3\,(2x-1) > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 6x-3 > 2x+3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 8x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 3 ම සඳහා 10
නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා 5

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x < 0}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

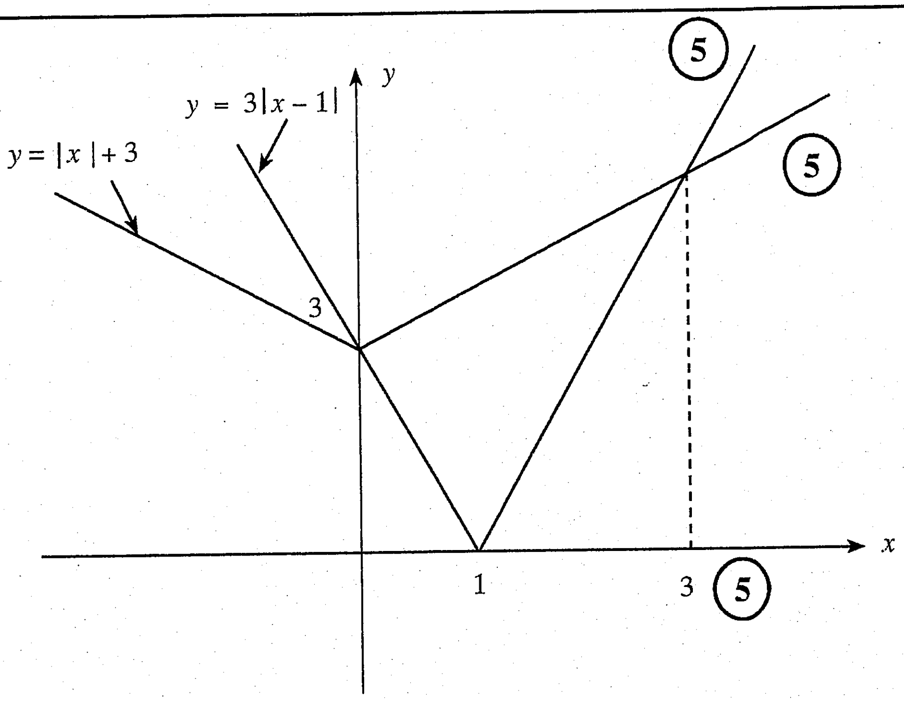
ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ. 5

25

2. එක ම රූප සටහනක $y=3|x-1|$ හා $y=|x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1|>2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්වික අගයන් සොයන්න.



එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x+3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$, මෙහි $u = 2x$. 5

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$. 5

25

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(4r+1) = k(2k+3)$ වේ. 5

$$\text{දැන්, } \sum_{r=1}^{k+1}(4r+1) = \sum_{r=1}^{k}(4r+1) + \{4(k+1)+1\}$$

$$= k(2k+3) + (4k+5) \quad 5$$

$$= 2k^2 + 7k + 5$$

$$= (k+1)(2k+5) \quad 5$$

$$= (k+1)[2(k+1)+3]$$

ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

5

25